Mathematische Grundlegungsprogramme

(Paul Natterer)

Die aktuelle Grundlagendiskussion der Mathematik setzt mit dem **Logizismus** ein, also dem Programm der **Fundierung der Mathematik in der Logik**. Dazu und zur weiteren Entwicklung Folgendes:

- Im Logizismus wird Mathematik als syntaktisch und semantisch **interpretierter** Formalismus verstanden (Frege, Russell, Whitehead). Der Logizismus überwand zwar den mathematischen **Psychologismus** des 19. Jh., wurde aber um 1900 durch die Entdeckung logischer und semantischer **Antinomien** selbst in eine Krise gestürzt.

- Aus dieser Krise gingen die zwei Alternativkonzeptionen des Formalismus Hilberts und des Intuitionismus Browers hervor.

- Der **Formalismus** wollte und will nun die Mathematik als **uninter-pretiertes**, aber vollständiges **axiomatisch-deduktives Regelsystem** aufbauen. Drei Entdeckungen zeigten die Problematik auch dieses Ansatzes:
  - Einmal Gödels Theoreme betreffs der **formalen Unvollständigkeit** logischer Systeme (vgl. z.B. Barrow: *Ein Himmel voller Zahlen. Auf den Spuren mathematischer Wahrheit*, Reinbek bei Hamburg 1999, 183–193).
  - Zweitens Tarskis Beweis der **semantischen Unvollständigkeit** logischer Systeme (vgl. Barrow 1999, 194–197).
  - Drittens Chaitins Analyse diophantischer Gleichungen, die bewies, dass es in der Arithmetik **Zufälligkeit** gibt, sodass die Mathematik – auch – als eine experimentelle Wissenschaft anzusprechen ist (vgl. Barrow: *Theorien für Alles*, Heidelberg/Berlin/New York 1992, 67, und ders. a.a.O. 1999, 210–213).
  - Letzteres wird noch deutlicher in der Wahrscheinlichkeitstheorie, Chaostheorie und experimentellen Mathematik, welche aus einem gegebenen Anfangszustand plus gegebenen Algorithmen eine praktisch unvorhersagbare Evolution mathematischer Strukturen erfolgen lässt (vgl. Barrow 1999, 376–380).
  - Auch in der mathematischen Praxis zeigt die Notwendigkeit des ausgedehnten Einsatzes sogenannter numerischer (Näherungs-)

Verfahren statt exakter Verfahren in der Analysis die engen Grenzen exakter mathematischer Methoden, hier in der Differential- und Integralrechnung. Die gängigen Verfahren beschreiben entweder nur bestimmte Situationen oder sind extrem zeitaufwendig oder greifen überhaupt nicht mehr (vgl. Scholl/Drews: *Handbuch Mathematik,* Niedernhausen 1997, 661–687).

- Diese Entdeckungen weisen wieder stärker auf die unüberholbare Einsicht des Logizismus hin, dass Mathematik nicht nur mit uninterpretierten formalen Algorithmen, sondern auch mit **logischer Bedeutung** und Sinn zu tun hat (Barrow 1999, 434–453).

- Dennoch haben Hilbert und der Formalismus eine Fortsetzung in dem Mathematikerkollektiv **Bourbaki** gefunden, das eine zugleich pragmatische und schulmäßige, scholastische Systematisierung der Mathematik vorlegt (Barrow 1999, 202–209).

- Die zweite Alternativkonzeption zum Logizismus, der **Intuitionismus**, kann derzeit als relativ überzeugendste Grundlegung angesprochen werden. Er ist in Manchem eine moderne Rekonstruktion der kantischen Theorie der Mathematik (vgl. Schüler: *Grundlegungen der Mathematik in transzendentaler Kritik. Frege und Hilbert*, Hamburg 1983). So definiert der Intuitionismus wie Kant Mathematik (inkl. Arithmetik) als direkte Konstruktion in der Anschauung von Raum und Zeit, und lehnt daher nicht konstruierbare, aktual unendliche Mengen ab (Barrow 1999). Der Intuitionismus kommt jedoch nicht insgesamt mit Kants Theorie der Mathematik überein. Denn Letztere beinhaltet auch massiv logizistische Vorgaben, insofern **begriffslogische Definitionen Ausgangspunkte und Rahmenbedingungen** der Konstruktionen in der Anschauung sind (siehe dazu auch in Folge).

- Interdisziplinär bzw. philosophisch ist der Intuitionismus als konstruktivistische und operationalistische Theorie der Mathematik dem Konstruktivismus zuzurechnen, nur nicht dem logischen oder theoretischen Konstruktivismus (siehe Piaget: *Einführung in die genetische Erkenntnistheorie*, 5. Aufl. Frankfurt 1992).

- Friedman (*Kant and the Exact Sciences*, Cambridge, Mass. 1992, 80ff) unterscheidet bei intuitionistischen Theorien eine **Anti-Russell-Interpretation**, bei welcher die Anschauung nur die Wahrheit der Axiome garantiert, und welche mit nichteuklidischen Geometrien vereinbar ist. Davon wird eine **Russell-inspirierte Interpretation** unterschieden, bei welcher die Anschauung die Wahrheit der Axiome und der Ableitungen (Beweise) garantiert, und welche nur mit der euklidischen Geometrie vereinbar ist. Letztere ist nach Friedman Kants Position (auch wenn im Prinzip beide Interpretationen mit Kants Theorie vereinbar sind). Dies alles steht im Horizont der friedmanschen These, dass bei Kant der geometrische Begriff mit der geometrischen Anschauung identisch ist.

- Tatsächlich ist für Kant die Definition eines mathematischen Begriffs **nicht** identisch mit der Konstruktion des zugeordneten Objekts in der Anschauung (Scheffer: *Kants Kriterium der Wahrheit: Anschauungsformen und Kategorien a priori in der „Kritik der reinen Vernunft*, Berlin/New York 1993, 133–134; Falkenburg: *Kants Kosmologie: die wissenschaftliche Revolution der Naturphilosophie im 18. Jahrhundert*, Frankfurt 2000, 324–331). Für Kant sind **begriffliche Definitionen** und begrifflich erfasste synthetisch-apriorische Axiome der Anschauung **Voraussetzungen** der Ableitungen (vgl. auch Friedman selbst 1992, 86–87). Dies lässt sich nicht auf rein anschauliche Konstruktion und Verifikation von Ableitungen reduzieren (Friedman 1992, 90–91).

- Diese Sachlage wird auch von daher erhärtet, dass Kant sehr wohl die widerspruchsfreie Denkmöglichkeit nichteuklidischer Geometrien *qua abstrakt-begrifflicher* Axiomensysteme erörtert und behauptet, und diese von dem Problem *anschaulich-konstruktiver* Modelle derselben unterscheidet.

- Die Ergebnisse der modernen Grundlagenforschung zeigen, dass die Mathematik **keinen absoluten** oder priviligierten ontologischen und logischen **Sonderstatus** aufweist, sondern wissenschaftstheoretisch durchaus linguistischen oder jurisprudentiellen Kategorien, Methoden und Paradigmen analog ist (vgl. Barrow 1999, 271–273, 376–380). Die Mathematik ist insofern auch mit der Metaphysik, Ontologie und Theologie vergleichbar, als sie – um im Bild zu bleiben – als ein Meer oder Universum oder eine Totalität angesprochen werden kann, von der nur ein Teil erforscht und kartographiert ist. Barrow (1999, 362–363, 456–461) verweist hier auf Kants entsprechende Verwendung dieses Bildes in der kantischen *Kritik der reinen Vernunft* (B 294–295).

- Man kann Mathematik somit **formal** mit einer Abfolge konzentrischer Kreise beschreiben, wovon der innerste Kreis die **praktisch berechenbaren** mathematischen Wahrheiten sind. Der folgende Kreisring umfasst die Menge der **prinzipiell berechenbaren** Sätze. Der dritte konzentrische Ring ist die Dimension der **entscheidbaren** Wahrheiten oder Sätze. Der äußerste Ring schließlich stellt die Dimension aller mathematischer Wahrheiten dar, auch der **nicht entscheidbaren** (vgl. Barrow (1992) und (1999, 362–363)).

- Man kann Mathematik schließlich **semantisch-referentiell** oder ontologisch als immanenten Platonismus (die Einsicht des Logizismus) beschreiben, der methodologisch durch Invention und Konstruktion partiell erschlossen bzw. entdeckt wird (die Einsicht des Intuitionismus), und durch Axiomatisierung und Deduktion systematisiert wird (die Einsicht des Formalismus).

- Immanenter Platonismus meint, dass mathematische Sachverhalte als eine **ideelle, objektive, logische Realität** in der konkreten mathematischen Struktur der Materie und Energie aufweisbar sind. Beweis hierfür ist die mathematische Naturwissenschaft und das gelingende Experiment mathematischer Manipulation der Natur oder Technik (vgl. Barrow 1992).

- Diese drei semantischen Interpretationen der Mathematik prägen auch die Grundlagendiskussion der mathematischen Naturwissenschaft. Terminologisch ist der Vergleich etwas verwirrend, da der mathematische Logizismus hier als naturwissenschaftlicher Konstruktivismus wiederkehrt (vgl. Falkenburg 2000, 307–316), der Formalismus als (logischer) Empirismus (vgl. Falkenburg 2000, 316–317), und der Intuitionismus (Inventionismus) als metaphysischer Realismus (vgl. Falkenburg 2000, 318–319). Dass jenseits einseitiger Ansätze maßgebliche Forscher wie Bohr, Heisenberg und Einstein eine differenzierte Konzeption in Richtung der kantischen Theorie vertraten, zeigt gleichfalls Falkenburg (2000, 320).

- Was die Frage nach dem für uns letztlich ungreifbaren Wesen der Mathematik insgesamt betrifft, so ergibt sich hierbei eine ähnliche transzendentale **Dialektik** wie bei den kantischen transzendentalen Ideen, die berechtigt, von einer ultimativ **negativen Philosophie** der Mathematik zu sprechen (vgl. Barrow (1999).