Platonische Grundlegung der Mathematik

Paul Natterer

Die aktuelle hermeneutische Aufarbeitung der platonischen Mathematik geht auf ein Forschungsprogramm bzw. eine Schule der Klassischen Philologie zurück. Deren Begründer und charismatische Leitfigur ist Professor Arbogast Schmitt. Diese Schule konfrontierte die Wissenschaftsgemeinschaft der Gegenwart neu mit dem **systematischen Anspruch** von Platons Philosophie und Theorie der Mathematik. Wer in den späten 80er / frühen 90er Jahren des letzten Jahrhunderts an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz ein geisteswissenschaftliches Studium absolvierte, konnte in den brechend vollen Vorlesungen und Vorträgen Schmitts etwas von der Anziehungskraft der Lehrveranstaltungen Platons v.a. auf die Generation seiner Zeit ahnen. Schmitt ist heute Lehrstuhlinhaber für Gräzistik am Seminar für Klassische Philologie der Philipps-Universität Marburg und gilt als ein international führender Platoexperte. Seine Schüler vertreten und verkörpern an zahlreichen Universitäten das Fach Gräzistik. Die vielbeachtete Programmschrift der Schule ist Schmitt, Arbogast: *Die Moderne und Platon. Zwei Grundformen europäischer Rationalität*, 2. Aufl. Stuttgart 2008, 596 S. Sie hat bereits jetzt eine beachtliche Wirkungsgeschichte. Da auch ich zu den Schülern Arbogast Schmitts zähle, darf ich die philologisch-hermeneutische Aufarbeitung der platonischen Mathematik gewissermaßen aus erster Hand skizzieren.

(1) Arithmetik als erkenntnistheoretische Herleitung der Grundbegriffe der Mathematik

Eine einführende Skizze der platonischen Grundlegung der Mathematik bietet Arbogast Schmitt in *Die Moderne und Platon* [Stuttgart 2008]: „Die **Arithmetik** war in der Antike eine Theorie der Zahl ..., d.h. eine **erkenntnistheoretische Herleitung der Grundbegriffe der Mathematik**. Sie hatte deshalb mit bewußter Absicht elementaren Charakter, ähnlich wie dies die Mengenlehre in analoger Begründungsfunktion für die gegenwärtige Mathematik hat. Allgemeine Rechenverfahren [Mathematik als anwendbarer Rechenkalkül] betrieb man in der Antike in der Disziplin der '**Logistik**'“ (Schmitt: *Die Moderne und Platon*, Stuttgart 2008, 237, Anm. 232)

(2) **Mathematik als Universalwissenschaft** [κοινη μάθηματικη επιστημη / mathesis universalis]

„Das von Platon im 7. Buch der Politeia entwickelte Konzept einer 'gemeinsamen mathematischen Wissenschaft' ... (koinê mathêmatikê epistêmê)“ oder

„'**Universalmathematik**' [wird verstanden als] eine **für alles praktische und theoretische Erkennen grundlegende Wissenschaft**, weil in ihr die **Erkenntniskriterien von Bestimmtheit** entfaltet wurden, und weil jeder Gegenstand nur unter dem Aspekt und in der Weise und in dem Maß, in dem er etwas Bestimmtes ist, erkennbar ist [und] in der **Analyse der Begriffsbedingungen der Zahl** in reiner Form die allgemeinen Bedingungen, wie etwas *Monas*, d.h. eine je bestimmte Einheit sein kann, darlegbar sind.“

„Die neue Mathematik, wie sie vor allem von Stevin, Vieta und Descartes entwickelt wird, entsteht bereits im Gefolge der erkenntnistheoretischen Einebnung des **der Sache nach** und des **für uns** Früheren. In einer mustergültigen Untersuchung hat Jakob Klein schon 1936 aufgewiesen [*Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B: Studien 3, Berlin 1936, 18–105; 122–235. Englisch: *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Cambridge, Mass. 1968], daß in der 'neuen' Mathematik der Begriff der Monas (als Erkenntnisprinzip der Zahl) in einen Zahlbegriff verwandelt wird, für den Zahl nichts als symbolische Repräsentation von Zählhandlungen ist“

„Es gehört zu den Konsequenzen dieses neuen symbolisch repräsentativen Zahlbegriffs, daß die Allgemeinheit der Mathematik nicht mehr in ihrer **Kriterienfunktion für die Beurteilung von Bestimmtheit** gesucht wird, sondern in ihrer **allgemeinen Anwendbarkeit**: mathesis universalis wird zu einem allgemeinen, d.h. auf möglichst alles anwendbaren, 'formalen' Rechenkalkül.“

„Die praktische Effizienz dieser neuen Mathematik überdeckte für Jahrhunderte ihre **Begründungsdefizite** und ihre ... höchst **spekulativen Basisannahmen** [...] daß 1. in der **Berechnung rein quantitativer Verhältnisse die Realität tatsächlich erfaßt werden kann**, und 2. daß die **Welt ... immanent mathematisch strukturiert und von dieser Strukturiertheit vollständig und durchgängig geprägt** ist.“

(3) Ontologische Verpflichtungen der platonischen und neuzeitlicher Mathematik-Grundlegungen

Die Basisannahmen der neuen Mathematik „enthalten (wenn auch nicht intendiert) erheblich **mehr Metaphysik als die platonische Ideenlehre**. Denn Platon behauptet zwar, Begriffe wie Einheit, Identität, Gleichheit, Linie, Kreis, Fläche, Dreieck, Würfel seien nicht nur subjektive Denkprodukte, sondern hätten eine einsehbare Realität, er behauptet aber nicht (wie z.B. Galilei), diese konkrete empirische Welt sei wie eine Art Uhrwerk eine exakte Verkörperung dieser intelligiblen Realitäten [...] Das **einsehbar Wirkliche** ist im Bezug auf die **empirische 'Realität'** vielmehr etwas nur mögliches, es sind Vorgaben für mögliche Prozesse, die mehr oder weniger von diesen Vorgaben bestimmt sein können.“

„Es gibt nach platonischer Lehre keine konkreten Einheiten, die exakt und nur zwei sind, keine exakten Relationen oder Proportionen unter realen Einheiten, es gibt keine Punkte, Geraden, Ebenen, keine rechten Winkel, keine Dreiecke mit der Innenwinkelsumme von 180 Grad, keine platonischen Körper usw. **Die euphorische Überbewertung der 'Wirklichkeit'**, als sei sie ganz und gar von Regel und Gesetz durchdrungen und daher – prinzipiell – **ohne Rest mathematisch berechen- und rational erklärbar, könnte Platon nicht teilen**. Er denkt unter diesem Aspekt erheblich moderner“

Dazu eine Beispiel: „Der Begriff der **Gerade** ist in diesem Sinn ein Beurteilungskriterium dafür, ob ein konkretes Phänomen – eine wirklich vorgestellte oder gezeichnete Linie, eine Kante usw. – 'wirklich' gerade ist, und vor allem, was an einem konkreten Einzelding wirklich 'gerade' ist und was mit dieser Eigenschaft nur akzidentell in Verbindung steht. Dieser Begriff enthält in sich bereits eine **hochkomplexe Begriffsstruktur**. Man benötigt zu seinem Verständnis nicht nur die für jede bestimmte Einheit konstitutiven Begriffe wie **Einheit, Vielheit, Identität, Verschiedenheit, Ganzes, Teil** usw., sondern darüber hinaus spezifischere Begriffe wie **Lage, Abstand, Richtung**, aus deren richtiger Kombination sich erst der Begriff der einfachsten Form einer kontinuierlichen Erstreckung ohne Abweichung in der Richtung (usw.), also der Begriff der Geraden, ergibt.“ (Schmitt 2008, 237–240)

(4) Bedeutung der Zahl für die begriffliche oder ideelle Erkenntnis: Das 7. Buch von Platons Staat [*Politeia*]

Eine ausführlichere Hinführung zur platonischen und überhaupt antiken Mathematik bietet der wichtige Aufsatz von Schmitt: Zur Erkenntnistheorie bei Platon und Descartes. In: *Antike und Abendland* 35 (1989), 54–82: „Platons Einführung der Begriffe 'konfus', und 'distinkt' im 7. Buch des Staats steht im größeren Zusammenhang der Frage nach der **Bedeutung der Zahl für die Erkenntnis der Idee**. Gesucht wird ein μάθημα ψυχης [mathema psyches], eine durch Lernen gewonnene Erkenntnis der Seele, durch welche die Seele vom Werdenden zum Sein ... geführt wird.“ (Schmitt 1989, 64)

„Dieses μάθημα [mathema] wird von Sokrates als ein κοινον μάθημα [koinon mathema = allgemeines Wissen] charakterisiert, von dem notwendigerweise jede Art von τέχνη [téchne = Technik] und επιστημη [epistéme = Wissenschaft] Gebrauch mache. (Geistesgeschichtlich ist diese Stelle der Ursprung der theoretischen Arithmetik als mathesis universalis bzw. κοινη μάθηματικη επιστημη [= gemeinsame mathematische Wissenschaft / mathematische Universalwissenschaft]. In fast allen griechischen Einführungen in die Arithmetik – etwa bei Theon von Smyrna, Nikomachos von Gerasa oder Jamblich – wird denn auch diese ganze Stelle des Staats fast wörtlich paraphrasiert, wenn es um die Begründung geht, warum die **Mathematik Universalwissenschaft** ist. In der – allerdings massiven – Umformung, die diese communis mathematica scientia zu Beginn der Neuzeit etwa durch Stevin und Vieta erfahren hat, ist sie auch noch das eminente Paradigma, an dem sich Descartes' Erkenntnisfundierung orientiert.“ (Schmitt 1989, 64)

(5) Erkennntisbedingungen des begrifflichen Seins und der Zahl

Platons klassischer Text im *Staat* zur Mathematik als Universalwissenschaft sagt dazu: „Das, was man lernen muß, um dieses μάθημα [Wissen] zu finden und zu begreifen, ist 'nur dies Geringe, eins, zwei, drei zu unterscheiden' [*Staat* 522c 5/6], etwas genauer ... man muß erfassen, was die gedanklich notwendigen **Erkenntnisbedingungen** sind, von denen man zwar immer schon Gebrauch macht und die man in diesem Sinne als gültig voraussetzt, wenn man **eins, zwei, drei unterscheidet**, die man aber rein als sie selbst erkannt haben muß, wenn man begreifen und erklären können will, was diesen Unterschied ausmacht“ (Schmitt 1989, 64) Es geht darum, „was vorausgesetzt wird, **wenn überhaupt gedacht und nicht nur konfus empfunden** wird“ (Schmitt 1989, 72), und besonders und vorrangig, wenn etwas als **begriffliche Einheit**, unterschieden von anderem erfasst und gedacht wird: „Aus der Reflexion auf die Erkenntnisbedingungen des Seins entfaltet das Denken die Erkenntnisbedingungen der Zahl, der geometrischen und stereometrischen Figuren, der Musik, der Astronomie, der Mechanik etc.“ (Schmitt 1989, 74)

(6) Begriffliche Interpretation und Identifizierung der Wahrnehmungsobjekte [= Hypothesis / Zu-Grunde-Legung der Idee] hat transzendentale Grundbegriffe zur Voraussetzung

„Die **Hypothesis** [Voraussetzung, Zugrundelegung, Anwendung] **des Eidos** [Idee, intelligible Allgemeinstruktur] [ist] eine **in sich selbst voraussetzungsreiche Hypothesis** ..., die zu ihrer Erklärung auf andere, höhere Hypotheseis zurückgeführt werden muß. Diese Rückführung ... endet ... beim εν [**Hen** = Eines, Einheit], das ... **Grund des Seins** (also dafür, daß etwas ein einheitlich so und nicht anders bestimmtes Sein hat) **und der Erkennbarkeit** von allem ist“. (Schmitt 1989, 74)

In der aristotelischen und scholastischen Philosophie bis einschließlich Kant (vgl. § 12 der transzendentalen Deduktion B der KrV) werden diese über den normalen Ideen, also über den Art- und Gattungsbegriffen liegenden Begriffe die **Transzendentalien** genannt werden (ens – unum – aliquid – verum – bonum). Diese platonische Grundlegung des begrifflichen und mathematischen Denkens anhand der Transzendentalien ist also bis 1800 Gemeingut der europäischen Zivilisation.

Grundlegende Transzendentalien sind dabei die Begriffe **Sein** und **Einheit**: „Erkennbar ... ist, wie das Denken aus der Reflexion auf seine eigenen Urteilsprinzipien weiß, nur das Sein [*qua* mit sich selbst identische Idee oder eindeutiger Begriff, nicht *qua* stetig wechselnder und zusammengesetzter Sinnesgegenstand]. Also ist die Frage nach den Bedingungen der Erkenntnis die Frage nach den Bedingungen der Erkenntnis des Seins. Von dieser Fragestellung her ist der **Begriff des Einen die erste und auf keine Weise mehr aufhebbare denknotwendige Bedingung**, wenn überhaupt etwas als etwas soll gedacht werden können. Ohne den Begriff der Einheit kann auch der Begriff des Seins nicht mehr gedacht werden“. (Schmitt 1989, 75)

(7) Die theoretische Arithmetik ist die Grundlagendisziplin für die transzendentalen Grundbegriffe wissenschaftlicher Erkenntnis

„Das Auszeichnende des Zahlenwissens“ ist, dass in der **Welt der Zahl** die „**intelligible Voraussetzung alles rationalen, weil distinkten Seins**“ rein für sich und unvermischt aufgezeigt werden kann: „Der einsehbare Sachgehalt des bestimmten Seins [könnte] selbst gar nicht begriffen werden ..., wenn er nicht im Licht anderer Begriffe wie der **Einheit, Vielheit, Identität, Verschiedenheit, Gleichheit, des Ganzen und des Teils usw.** gedacht würde. Und erst aus der in diesen Begriffen selbst liegenden Ordnung wird deutlich, wie in ihnen zunächst die **Begriffsbedingungen der Zahl**, dann der **Figur**, dann des **Tons** usw. enthalten sind.“ (Schmitt 1989, 79).

„Das Denken“ kommt bei Platon nicht „in einem Akt intellektueller Anschauung zu einem Wissen von Sein, Einheit, Zahl usw., sondern nur durch eine kritische Rückwendung auf die axiomatischen Voraussetzungen seiner selbst“ (Schmitt 1989, 80): „Die platonische Lehre von den sogenannten Ideenzahlen, d.h. die theoretische Grundlegung der Arithmetik, ist daher das eigentliche Analogon der platonischen Erkenntnisbegründung zu den Kategorien Kants.“ (Schmitt 1989, 78)

Hier sollte man freilich anmerken, dass Kants Kategoriensystem kein Ersatz für die traditionelle platonische [begriffsanalytische] Erkenntnisbegründung darstellt und darstellen will. Letztere wird von Kant anerkannt. Kants Kategorientafel will vielmehr eine Ergänzung der **begriffsanalytischen** Logik und Metaphysik sein – für den Bereich des **synthetischen** realen raum-zeitlichen Verstandesgebrauchs. Einschlägig dazu Natterer: *Systematischer Kommentar zur Kritik der reinen Vernunft*, Berlin / New York 2003, Kap. 17 Der objektive reale Verstandesgebrauch – Wissenschaftshistorischer Kontext, 246–266; und Kap. 19: Der objektive reale Verstandesgebrauch – Metatheoretische Transzendentalien der Tradition, 344–366.

(8) Rekonstruktion des Ursprungs der *artes liberales* und der Mathematiktheorie im Platonismus

Eine umfassende Aufarbeitung der platonischen und überhaupt antik-scholastischen Mathematik und Wissenschaftstheorie lieht inzwischen vor von Frau Gyburg Radke [jetzt: Uhlmann]: Radke, Gyburg: *Die Theorie der Zahl im Platonismus. Ein systematisches Lehrbuch*, Tübingen/Basel 2003, 830 S. Frau Uhlmann [Radke] ist Schülerin Arbogast Schmitts und hat vor kurzem einen Lehrstuhl für Gräzistik Professur an der FU Berlin übernommen. Ihre monumentale Untersuchung *Die Theorie der Zahl im Platonismus* wurde (u.a.) 2006 mit dem höchstdotierten Förderpreis der deutschen Wissenschaft ausgezeichnet, dem Gottfried Wilhelm Leibniz-Preis – mit der Begründung: „Ihre Arbeit zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass sie ihre altertumswissenschaftlichen Forschungsprojekte in größere kulturgeschichtliche und hermeneutische Zusammenhänge stellt. Mit ihrem Fächergrenzen überschreitenden Ansatz hat sie wesentliche Beiträge zur Rezeptionsgeschichte der Antike vorgelegt.“ Das Forschungsprojekt *Die Theorie der Zahl im Platonismus* fußt auf Vorarbeiten Arbogast Schmitts in einer Manuskriptfassung [Arbeitstitel: *Subjektivität und Innerlichkeit. Deutung der Antike und neuzeitliches Selbstverständnis*] von *Die Moderne und Platon. Zwei Grundformen europäischer Rationalität.* Die Buchvorstellung von *Die Theorie der Zahl im Platonismus* zeigt die weitreichende Bedeutung der platonischen Universalmathematik für praktisch unsere gesamte kulturelle Überlieferung:

> „Die *artes liberales* sind das Fundament der abendländischen Bildung, für die Wissenschaften ebenso wie für Kunst und Literatur. Die These von der Einheit dieser Disziplinen ist der Schlüssel zum Verständnis des einheitlichen Weltbildes in Spätantike und Mittelalter. **Diese universale Bedeutung hat ihr historisches ebenso wie systematisches Prinzip in der Wissenschafts- und Zahlentheorie des Platonismus der Spätantike**. Das Buch diskutiert in einem ersten vornehmlich forschungsgeschichtlichen Teil die möglichen Deutungen zu Ursprung und Einheit der *artes liberales*. Im zweiten Hauptteil werden die **Grundlagen des Zahl- und Mathematikbegriffs bei Platon und im Neuplatonismus systematisch erschlossen**. Interpretiert und in heutiger Begrifflichkeit erklärt werden in dieser Darstellung neben den einschlägigen erkenntnis- und mathematiktheoretischen Texten in Platons Schriften selbst Texte des Neupythagoreers Nikomachos von Gerasa, dessen Arithmetiklehre *das* Grundbuch der Wissenschaftstheorie bis weit in die Neuzeit war, sowie Lehrstücke der Neuplatoniker Plotin, Porphyrios, Iamblich, Syrian, Proklos, Hermeias von Alexandria, Ammonios Hermeiu, Asklepios von Tralles, Johannes Philoponos, Damaskios, Simplikios, Olympiodor u.a. Die systematische Anlage der Rekonstruktion des Ursprungs der *artes liberales* und der Mathematiktheorie im Platonismus, die Einführungen in die Prinzipien platonischen Argumentierens, der Umfang der berücksichtigen Quellen und Autoren sowie ein ausführliches Inhaltsverzeichnis, interne Querverweise und Sach- und Stellenindices machen das Buch zu einem **Lehrbuch der platonischen Wissenschaftstheorie und ihrer mathematiktheoretischen Grundlagen**.“

(9) Generative Zahlen

Wegen ihrer Kompaktheit und Beschränkung auf das Allerwesentlichste folgen wir bei der Rekonstruktion des Ursprungs der *artes liberales* und der Mathematiktheorie im Platonismus der ursprünglichen Manuskriptfassung Arbogast Schmitts [Teil II, Abschnitt E: Die Zahl als Explikation der Ratio bei Platon und in der Spätantike, 57–93]. Wir haben bereits im Vorhergehenden gesehen, dass und warum Platon der Eins bzw. der Einheit erstrangige Bedeutung in der Grundlegung der Arithmetik und Mathematik überhaupt zumisst. Dazu noch einmal das Folgende a.a.O.:

> „Der Begriff des seienden **Einen** [ist] keine Setzung, sondern er ist die zwingend **evidente Voraussetzung des Denkens** schlechthin, die man gar nicht bestreiten kann, ohne sie in dieser Bestreitung bereits anerkannt zu haben [...] Da die **Ableitung der Zahlbegriffe allein aus dem von dieser axiomatischen Voraussetzung des Denkens Geforderten** her geschieht, ist sie völlig 'rein' und kann dieselbe Sicherheit der Erkenntnis beanspruchen wie die Erkenntnis des Axioms selbst [...] Von dieser Fragestellung her erscheint bereits die Eins als ein synthetischer Begriff, und damit als ein auflösbarer, teilbarer Begriff, und zwar auflösbar in die Momente – z.B. in den Begriff der **Einheit** selbst, den Begriff des **Seins**, den Begriff des **Verschiedenen** –, von denen abhängt, daß er überhaupt in sei-

nem genauen Inhalt begriffen werden kann.“ (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio)

Die beiden anderen für die Zahlentheorie und Genese der Zahlen grundlegenden Zahlen sind die Zahlen **Zwei** und **Drei**. Sie sind mit und neben der Eins generative Zahlen (wie übrigens auch die **Primzahlen**):

> „Im Begriff der Zwei ist die Zwei als eine **bestimmte Einheit** begriffen, die aus der **Synthese des bestimmten Einen mit sich selbst** besteht, die also analysierbar, teilbar ist, und zwar in je eine Einheit, aus deren Zusammensetzung sie hervorgegangen war, sie ist mit mit anderen Worten **in gleiche Einheiten teilbar**. Alle Zahlen, deren Synthesis von derselben Art wie die der Zwei ist, d.h. die in eine bestimmte, mit sich selbst zusammengesetzte Einheit aufgelöst werden können, bilden daher mit der Zwei eine Klassengemeinschaft, die **Klasse 'gerader' Zahlen**.“
>
> „Der Begriff der Drei läßt sich nicht in dieser Weise 'analysieren', sondern hat mit dem Begriff des Einen selbst die **Unteilbarkeit** gemeinsam, ist der **Begriff der ersten (primen), 'ungeraden' Zahl**. **Geradheit und Ungeradheit** machen damit grundsätzliche Unterschiede in der Weise aus, **wie Zahlen bestimmte Einheit** sein können und lassen daher nicht zu, daß die Zahlen als homogene Einheiten gedacht werden. Die Zwei ist nicht in derselben Weise bestimmte Einheit wie die Drei, und was Drei ist, wird nicht dadurch begriffen, daß man zur Zwei noch eine Einheit hinzudenkt [...] sondern dadurch, daß man begreift, **wodurch** und in welchem Sinn die **Drei** wieder eine **bestimmte Einheit** ist. Die Bestimmtheit ihrer Einheit aber besteht darin, daß sie die erste, nicht in gleiche Teile auflösbare, nur von der Einheit 'gemessene' Einheit ist – und damit zum Paradigma dafür wird, wie begriffen werden kann, worin die **Unauflöslichkeit der Einheit eines synthetischen Seins** besteht.“ (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio)
>
> Weitere generative Zahlen sind die **Primzahlen**. Sie „werden ... nicht im eigentlichen Sinn erzeugt, sondern je daran in ihrem **primären Einheitssein** begriffen, daß sie nur durch sich selbst und durch die Einheit selbst 'gemessen' werden. [...] Primzahlen sind in diesem Sinn selbst **generative Elemente von Zahlen**“ (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio).

(10) Die moderne Axiomatisierung der Arithmetik [Peano'sche Axiome] setzt das System der natürlichen Zahlen als gegeben voraus

Schmitt: „Im Unterschied zu Platon beschreiben diese [fünf Peano'schen] Axiome aber nur die allgemeinsten Eigenschaften der Zahlenreihe überhaupt, ihre Gewinnung ist unmittelbar an den **als gegeben vorausgesetzten Eigenschaften der Reihe natürlicher Zahlen** ausgerichtet. Die **Orientierung am System der ganzen Zahlen** hat für diese Axiomatisierung der Arithmetik ... die Funktion, den arithmetischen Axiomen die Evidenz zu verschaffen, 'die die geometrischen aus der Anschauung bezogen hatten', wobei freilich 'nur **deren Wesensbestimmung als weiteres Problem offenblieb**' (Otto Toeplitz [1881–1940, Schüler Hilberts im Bereich der mathematischen Analysis, Mathematik-Didaktiker, Mitbegründer der Zeitschrift „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik“, Forschungen über die Beziehung zwischen klassischer griechischer Mathematik und Philosophie]). Ein **System von Zahlen** – und zwar gleichgültig welcher Art, ob natürlicher, imaginärer, reeller, irrationaler Zahlen usw. – ist aber **niemals etwas 'Gegebenes'**, aus dem in Analogie zu geometrischen Konstruktionen (die aber in Wahrheit auch nichts anschaulich Gegebenes sind) eine Evidenz für irgendwelche begrifflichen Setzungen bezogen werden könnte. Denn sie sind ja **keine möglichen, dem Denken durch Intuition**

oder Anschauung gegebenen Gegenstände, da sie vielmehr Produkte, **Hervorbringungen des Denkens** selbst sind. Etwas vom Denken Hervorgebrachtes ist aber, wenn es a priori, unabhängig von aller Erfahrung hervorgebracht ist, selbst etwas Synthetisches, das **nicht Gegenstand einer unmittelbaren Evidenz** sein kann [...] Ein Denken, das die Evidenz für seine axiomatischen Setzungen im System der ganzen Zahlen sucht, ist also ein Denken, das nicht bemerkt, daß es eine seiner Setzungen an einer anderen Setzung absichert, weil es sich **über deren Zustandekommen keine Rechenschaft abgelegt** hat." (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio)

(11) Vorrang der begrifflichen Arithmetik vor geometrischer Anschauung und Konstruktion

Schmitt: „Die Entwicklung der **Begriffsmomente der verschiedenen Zahlarten und der ihen zugeordneten Zahlen** [...] liefert zugleich die **Applikationsbedingungen dieses arithmetischen Wissens** auf nicht mehr arithmetische 'Gegenstands'-bereiche, auf **Geometrie, Stereometrie usw.** und führt damit letztlich auch zur Möglichkeit der Absicherung auch jeder Art praktischen, technischen Wissens und Könnens."

Ein verbreitetes Vorurteil verkehrt hier die tatsächlichen Verhältnisse: Danach soll nicht die Geometrie usw. aus der begrifflichen Arithmetik abgeleitet worden sein, sondern soll sogar umgekehrt – in einer naiv-archaischen Überzeugung – „die antike Arithmetik die Erkenntnisse ihrer Gesetze auf die Anschauung gegründet haben". Nach dem Mathematiker und Philosophen Oskar Becker [1889-1964, Schüler Husserls und Lehrer Habermas', Beiträge zur mathematischen Grundlagenforschung im Sinne des Konstruktivistismus und Intuitionismus sowie zur Geschichte der Mathematik] ist die antike Mathematik nur und allein Geometrie, auch Arithmetik und Algebra erscheinen im geometrischen Gewand, als Konstruktion von Figuren. Gegen diese These hat [der bekannte Mathematiker und Techniker Istvan] Szabo eingewendet, daß sie im Widerspruch stehe zu den ausdrücklichen Grundsätzen der griechischen Philosophie seit Parmenides und auch der griechischen Mathematik, die **nicht im Zeugnis der Sinne, sondern im begrifflichen Denken** (*Logos*) **Sicherheit über das Sein ihrer Gegenstände** suchen:

> „Bei der Lösung der 'Probleme' im ersten Buch von Euklids Elementen z.B. ist die **Konstruktion** regelmäßig deutlich als ein bestimmter Schritt (nach der Stellung der Aufgabe – mit Nennung des Gegebenen und Gesuchten, nach der 'Angabe' und 'Thesis') von dem erst darauf folgenden **Beweis** und der **Schlußfolgerung** unterschieden." Der mathematisch entscheidende Beweis orientiert sich „an den von der Konstruktion erfüllten [begrifflichen] Forderungen, nicht etwa unmittelbar an der entstandenen Figur [...] Außerdem beziehen sich derartige Beweise auch deshalb nicht unmittelbar auf die konstruierten Figuren, weil sie in ihren Konklusionen einen Übergang vom Besonderen zum Allgemeinen vollziehen [...] Szabos Lösungsvorschlag, der diese Fehleinschätzung beseitigen soll, nimmt allerdings auch seinerseits wieder nur auf ein ... untergeordnetes Moment Rücksicht. Szabo sieht das Beweisprinzip der griechischen Geometrie nämlich in ihrem Streben nach Widerspruchsfreiheit und beruft sich zur Legitimierung dieser These auf die apagogischen Beweise [indirekte Beweise oder Widerspruchsbeweise

> zeigen, dass ein Widerspruch entstünde, wenn die zu beweisende Behauptung falsch wäre, also kann die Behauptung nicht falsch, sondern muss richtig sein, aufgrund des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten] bei Euklid. Euklid führt seine Beweise aber nicht nur als reductiones ad absurdum [indirekte Beweise], sondern er führt, und dies sind immer die sachlich zentralen, prinzipiellen Beweise, analytische und dihairetische, d.h. am bestimmten Sein selbst (des Dreiecks, des Kreises etc.) orientierte Beweise.“ (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio)

Das „Verhältnis ist ausnahmslos in allen relevanten Texten als eine **Abhängigkeit der Geometrie von der Arithmetik**, nie umgekehrt beschreiben, es gibt die explizite allgemeine Behauptung, daß die Gesetze der Geometrie aus der Arithmetik abgeleitet werden können, und es gibt ... in den Handbüchern des Nikomachos oder Boethius im einzelnen durchgeführte Beispiele.“ (ebd.)

(12) Arithmetik impliziert Geometrie: Zahlwissen ist implikatives Wissen geometrischer Figuren

Grundlegend ist die „Unterscheidung der Zahlen in Dreiecks-, Quadrat-, Polygonalzahlen usw.“, welche „auf das gesamte Wissenschaftssystem der artes liberales, auf Literatur, Musik und Architektur (gotische Kathedrale!) des Mittelalters nachhaltigen Einfluß ausgeübt hat.“

Zur Erinnerung: „Das Beweisprinzip ... bei der Behandlung der Zahlenkompositionen selbst war ... der **Nachweis der begrifflichen 'Erzeugung' der bestimmten Form der jeweiligen Zahleinheiten**“, wobei „die je verschiedene synthetische Einheit bestimmter Zahlen bestimmte geometrische Figuren quasi präfiguriert [...] Daß Zahlwissen implikatives Wissen von bestimmten Figuren ist, heißt ... daß die Zahl ... selbst die Bedingungen, Voraussetzungen bestimmter Figuren in sich enthält.“

Dabei gilt: „Die Frage des Übergangs von den Prinzipien [transzendentalen Grundbegriffen und Erkenntnisaxiomen] zur Zahl und von der Zahl zur Figur ist also zugleich eine Frage nach dem Übergang von nur einem **intellektiven** in ein **rational-diskursives** und von einem rational-diskursiven Denken ein **vorstellendes** 'Denken'.“ Es besteht eine „Zuordnung von (**bestimmter**) **Einheit**, **Zahl** und **Figur** zu den Erkenntnisvermögen **Intellekt** [*nous*], **Ratio** [*dianoia*] und **Imaginatio** [*phantasia*].“ Hier eine Erläuterung am Beispiel der Zahl Drei. Zunächst die **Prinzipienebene des Intellektes** (nous):

> „Wenn man die Zahl Drei in ihrer synthetischen Einheit zu begreifen sucht“, dann ist sie „eine **Ideenverflechtung** [noesis, noetische Einheit] anderer Art, als es die Teilhabe von Dingen, die von sich her etwas anderes als die Drei sind [z.B. drei Bäume, drei Striche], an der Drei ist. Dasjenige Vermögen, das die Drei in dieser ihrer nicht synthetischen Synthesis erfaßt, ist der **Intellekt** (nous). Er begreift, wenn er 'Drei' begreift, nicht zuerst etwas Ungerades, dann etwas Unteilbares usw., sondern er begreift die **so und nicht anders bestimmte Einheit der Drei in all ihren Momenten zugleich**, und zwar notwendig, da er sonst nicht 'drei', sondern eben der Reihe nach 'ungerade', 'unteilbar' usw. begriffen hätte.“

Dann die zweite **Ebene des rational-diskursiven Denkens** (dianoia):

> „Das rationale Denken aber, das sich der vom Intellekt eingesehenen Einheit vergewis-

sern will, muß diese Einheit **zergliedern** und ihre **einzelnen Momente** in ... einem Nacheinander denken."

Schließlich die dritte **Ebene der Vorstellungskraft** oder Imaginatio:

> Wenn man „vom rational-synthetischen Begriff der Drei zur anschaulichen Vorstellung der Figuren des Dreiecks übergeht", ist es „die Leistung der Vorstellung ..., daß sie das gänzlich unsinnlich, unräumlich Gedachte in einem **Nebeneinander** seiner Momente vorstellt und so gleichsam in einem **imaginären Raum** ausdehnt, dem Begriff sein **Schema** verschafft (vgl. den Euklidkommentar des Proklos). Auch die Vorstellung bringt nicht den Unterschied der Figuren heraus, sondern bringt lediglich zu den synthetisch geteilten Begriffen der Ratio die für die Vorstellung alles Begriffenen immer gleiche Dimension des Nebeneinander hinzu. So macht also auch die Reflexion auf die unterschiedliche Auffassung eines bestimmten Seins in Intellekt, Ratio oder Vorstellung klar, daß aus den jeweils niederen Vermögen keine beweissichernde Evidenz für das je besondere Sein des rational oder noetisch Erfaßten gewonnen werden kann." (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio)

Schmitt: „Die **intelligiblen Begriffsbedingungen der Eins, Zwei, Drei** sind nicht vom Begreifen je bestimmter Quantität ... abhängig, sondern werden aus dem begriffen, was die Intelligibilität von Quantität überhaupt ausmacht. In ihnen wird begriffen, was Zahl zur Zahl macht, denn ohne den **Begriff des bestimmten Einen** überhaupt wäre keine **quantitative Einheit** denkbar, da jede wieder ein bestimmtes Eines ist, ohne den **Begriff der Zwei** wäre die **Synthesis** keiner Quantität begreifbar, ohne den **Begriff der Drei** wäre nicht begreifbar, wie auch eine synthetisch bestimmte Einheit in ihrer **Synthesis ein Eines** sein kann. Zum begrifflichen Verständnis der ersten drei Zahlen benötigt man daher die Begriffe keiner anderen Zahl, sondern man muß lediglich die **Voraussetzungen von Zahl überhaupt** begriffen haben. Für das begriffliche Verständnis aller weiteren Zahlen aber ist man auf das Verständnis der Begriffsbedingungen der ersten drei Zahlen angewiesen, sie werden durch sie 'gemessen', sind Synthesis aus ihnen oder aus ihnen und anderen Zahlbegriffen":

> „In diesem Sinn sind alle Zahlen, deren bestimmte Quantität nur aus einer Synthesis der Eins selbst begriffen wird (die nur durch die Eins 'gemessen' werden) **nicht-synthetische Zahlen**. Zu ihnen gehören außer der **Eins, Zwei, Drei** selbst ... die **Primzahlen**. Denn jede Primzahl kann in ihrer bestimmten Quantität nur als Vervielfachung der Eins erkannt werden [...] Man kann das im Begriff der Fünf, der Sieben usw. einheitlich Gedachte daher auf keine Weise anders rational diskursiv begreifen ... als ... von einem Punkt [1] ausgehend ohne Auslassung kontinuierlich zu einem Endpunkt [5, 7]" fortschreitend: „Das **Schema dieser Zahlen**, d.h. ihre mögliche Darstellung im Medium des räumlichen Nebeneinanders der Vorstellung, [ist] die **Gerade**. Primzahlen sind also 'quasi' Linien- oder Strecken-Zahlen."

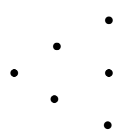
Man kann nun zwar Zahlbegriffe zusammengesetzter, synthetischer Zahlen (Nichtprimzahlen) auch sekundär durch Aneinanderreihung von elementaren Einheiten (Einsen) oder Teilern (z.B. 6 als Summe von 3 + 3) denken. Dabei erfasst man aber nicht die jeder auch zusammengesetzten Zahl eigene besondere Struktur. Diese Strukturen ergeben sich, wenn die jeweilige Zahlgröße durch Multiplikation der zugrundeliegenden Maßeinheiten 1, 2, 3 und ev. weiterer Primzahlen erzeugt wird. Beispiel:

> „Von ihrem Begriff her ist die 6 eine gerademal ungerade Zahl. Ähnlich wie die 2 als eine zweimalige Synthesis der Eins mit sich selbst verstehbar ist, ist die 6 eine zweimalige Synthesis der 3 mit sich selbst. Wenn man sie daher von dem für jede Zahl möglichen ...

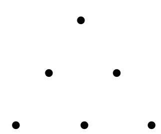
> Begriff einer bloßen Wiederholung unterscheiden und in der Weise, in der **in ihr bereits je bestimmte Einheiten miteinander komponiert** sind, begreifen will, darf man sie nicht einfach als eine sechsmalige Synthesis der Eins, sondern muß sie als eine zweimalige Synthesis der Drei begreifen [...] Ihre figürliche Darstellung muß also die Synthesis innerhalb der Drei abheben gegen die Synthesis der beiden Dreien miteinander.“ – „Diese doppelte Weise je linearer Synthese erzwingt aber gleichsam bei der **räumlichen Vorstellung dieser Synthesen** ein Umbiegen im eindimensionalen Fortschreiten von der Länge in die Breite und schafft so das **Entstehen von Flächen**.“

Die nebengeordnete, räumliche Synthesis von zwei Dreien ist aber die Addition zweier gleicher Dreiecke, so dass ein Rechteck entsteht, dessen Diagonale die Verbindungslinie der beiden aneinanderliegenden Dreiecke ist:

> „Die Art der Bildung einer bestimmten, einer Zahl zugeordneten geometrischen Figur [hängt] von der spezifischen Form der Synthesis ab, in der diese Zahl begriffen wird. Dies bedeutet auch, daß nicht alle Zahlen notwendig immer nur in ein und derselben Figur dargestellt werden müssen [...] sondern immer Ausdruck der jeweiligen Art der Synthesis [sind] von der her diese Zahl ... bestimmt werden kann [...] Betrachtet man die Sechs im Begriff einer gerademal ungeraden Zahl, dann ist ihr Schema ein Viereck, betrachtet man sie dagegen als Synthesis aus der Eins, der Zwei und der Drei, dann ist ihr Schema ein Dreieck, da man dann die Eins gesondert für sich denken muß, die Zwei als eine gesonderte Synthesis und die Drei als eine gesonderte Synthesis, die dann in einer Zusammensetzung dieser drei je verschieden gedachten Einheiten miteinander verbunden werden müssen, also



oder:



(13) Zahlwissen impliziert auch die Synthesis dreidimensionaler stereometrischer Figuren

Das Gesagte gilt auch für die Erzeugung komlexerer, dreidimensionaler geometrischer Figuren oder Gebilde: „Auch die in der Dimension der Vorstellung gebildete Vorstellung von dreidimensionalen Figuren hängt vom **Begreifen der Unterschiede in der Synthesis bestimmter zahlenhafter Quantitäten** ab. Wenn man z.B. die Vier nicht als Synthesis der Zwei mit der Zwei betrachtet, sondern als Synthesis der Drei und der Eins, und die Drei als Synthesis aus der Eins und der Zwei, dann muß man, damit man nicht eine gleichartige Reihung aus eins, zwei, drei, und d.h. die Zahl Sechs, bildet, die Drei als eine in sich gebildete Synthesis mit der Eins zusammensetzen. Die so entstehende Synthesis 'tut' zunächst die Eins zu der aus der Synthesis von eins und eins bestehenden Synthesis der Zwei hinzu und bildet so ein Dreieck: Diese so entstandenen Zahl bildet als Zahl die **Grundlage**, als Figur die **Basis** für die Eins, die in linearer Synthesis zu ihr als ganzer hinzugenommen werden muß, damit aus der Synthesis der Drei und der Eins die Vier entsteht. Die räumliche Vorstellung muß bei der Vorstellung dieser Art der Synthesis also wieder geradlinig umbiegen und kann dies von der gegebenen Fläche aus nur in die Höhe oder Tiefe und bildet so die dritte Dimension. Die erste Figur, die dieser Dimension entsteht, ist die **Pyramide** mit einem **Dreieck als Basis**“:

> „Daß diese Pyramide eine regelmäßige, gleichseitige Pyramide sein muß, wird klar, wenn man zuvor beachtet, warum das die Zahl Drei schematisierende Dreieck gleichseitig ist. Vom Prinzip der Linearität der Reihung her könnte man das aus der Eins und der Zwei gebildete Dreieck ja zunächst als ein ungleichseitiges rechtwinkliges Dreieck bilden wollen:
> Der je gleiche Abstand zwischen den drei Einheiten der Drei erfordert aber eine Figur, in der die zur Zwei hinzugesetzte Einheit von jeder der in der Zwei enthaltenen Einheiten den gleichen Abstand hat. Also kann die die Spitze des Dreiecks bildende Einheit nur auf einer Geraden liegen, die im rechten Winkel die Strecke zwischen den beiden Einheiten der Zwei halbiert.
> Analog dazu muß dann auch die zur Drei linear gleichmäßig hinzutretende Eins von allen [Eck-]Punkten der Dreiecksfläche den gleichen Abstand haben, also senkrecht auf der Mitte der Dreiecksfläche stehen.
> Die Art der Bildung der Linien, der Abstand der Punkte voneinander, ihre Lage usw., dies alles ist also vom diskursiven **Begriff einer bestimmten Zahlsynthese** gefordert, die ratio zeigt der unsicher suchenden Vorstellung gleichsam, wie sie die räumlichen Einheiten ordnen muß.“ (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio)

(14) Belege: Arithmetische Folgen von Polygonalzahlen als Formeln regelmäßiger Polygone [Figurierte Zahlen] – Polyederzahlen als Formeln platonischer Körper – Quadratische Gleichungen als Formeln der Kegelschnitte – Arithmetische Lösungen des Satzes von Pythagoras

„Die Wahrheit dieser **axiomatischen Grundgelegtheit aller Zahlen und Figuren in den Begriffsbedingungen der ersten drei Zahlen** ... beweist sich .. daran, daß nicht nur die **Begriffe aller Zahlen** aus den Begriffsbedingungen der ersten drei Zahlen, sondern auch die **Konstruktionsprinzipien aller ebenen Figuren** aus den Bedingungen der Bildung des Dreiecks und die **Konstruktionsbedingungen aller stereometrischen Figuren** aus den Bedingungen der Bildung der Pyramide abgeleitet werden können.“

> „Daß hier nirgends gespielt, nirgends in subjektiv deutender Spekulation Zahlen mit irgendwelchen ihnen von ihrem Begriff her gar nicht zukommenden Eigenschaften verbunden werden, sondern in allem streng begriffliche Notwendigkeit gesucht wird, kann man an dem systematischen Aufbau in den alten Handbüchern erkennen, der von den grundlegenden Axiomen über das Gerade und Ungerade ausgeht und, von der Entstehung der ersten, unzusammengestzten Zahl schrittweise zu den späteren, immer komplexer zusammengestzten Zahlen und den ihnen entsprechenden Schemata unter den Figuren übergeht. So beginnt die Behandlung der **figurierten Zahlen** z.B. immer mit der **Dreieckszahl**, es wird gezeigt, wie alle Dreieckszahlen auf eben die Weise wie die Drei selbst, d.h. als Synthesis der unmittelbar aufeinanderfolgenden Einheiten entstehen. So ist die erste Dreieckszahl die Drei als Synthesis aus der Eins und der Zwei, die zweite die Sechs, als Synthesis der Drei zur Einheit aus Eins und Zwei ...“ Hier eine Veranschaulichung:
>
> Dreieckszahlen:
> D1 = 1
> D2 = 1 + 2 = 3
> D3 = 1 + 2 + 3 = 6
> D4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10

> „Der Darlegung der Entstehung der Dreieckszahlen folgt die Behandlung der **Quadratzahlen**, die dem Entstehungsprinzip der Zwei (Dyas) folgen. Sie entstehen, wenn man zur Eins nicht unmittelbar die Zwei, sondern das bereits gebildete erste 'Dreieck', die Drei, zur hinzugestzten Drei nicht die Vier, sondern analog die Fünf ... usw. jeweils hinzusetzt“:
>
> Quadratzahlen:
> Q1 = 1
> Q2 = 1 + 3 = 4
> Q3 = 1 + 3 + 5 = 9
> Q4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16
>
> „In exaktem Fortschreiten in diesem Prinzip entstehen die **Pentagonzahlen**, wenn man von der Eins ausgehend jeweils drei Zahlabstände einhält und deren Synthesis zusammensetzt, also 1 + 4 = 5; 1 + 4 + 7 = 12, 1 + 4 + 7 + 10 = 22 usw. In jedem Fall entsteht dabei ein regelmäßiges Fünfeck, wenn man die beschriebene Bildung genau in räumlicher Entsprechung ausdrückt“:
>
> Pentagonalzahlen:
> P1 = 1
> P2 = 1 + 4 = 5
> P3 = 1 + 4 + 7 = 12
> P4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22
>
> „Die regelmäßigen **Sechs- und Siebenecke** entstehen durch Einhaltung eines jeweils um eine Einheit vergößerten Intervalls bei den einzelnen Synthesen usw.“ (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio)

„Erst wenn dieses aus der rational zu begreifenden Synthesis der einzelnen Zahlen erzeugte Bildegesetz der unterschiedlichen Figuren zugeordneten Zahlen durchschaut ist, kann man auch die Art der Anlegung des sogenannten Gnomons [hier: eine Art Rechentafel oder -schieber der antiken Mathematik; eine weitere Bedeutung ist: (Zeiger der) Sonnenuhr] um die Zahlfiguren verstehen, der einem 'zeigt', wie die jeweils nächste gleichartig figurierte Zahl gefunden werden kann. Dieser Gnomon hat bei jeder Zahlfigur eine andere Form, die ausschließlich von der Art der diskursiven Synthese dieser Zahl abhängt und ist nicht etwa das, was die bestimmte Anschauung einer Zahl als diese oder jene Figur erst möglich macht.“

„So belegt auch die arithmetische Bedeutung des Gnomon (in der Geometrie hat der Gnomon wieder eine andere) noch einmal von einem anderen Aspekt her, daß sich die antike Arithmetik die Beweise für die Zahlbegriffe nicht aus der Anschauung zusammensucht, sondern vielmehr die Möglichkeit bestimmter Anschauung aus der rationalen Bestimmtheit der Zahlen begründet hat.“

„In dieser Grundlegung [der Arithmetik sind] zum Beispiel auch die Bedingungen der Lösung komplizierter Rechenoperationen enthalten ... (Beispiel Diophant [Diophantos befasste sich mit der Lösung von algebraischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Heute nennt man algebraische Gleichungen, für die ganzzahlige Lösungen gesucht werden, diophantische Gleichungen]) [...] die Konstruktionsprinzipien komplexer planimetrischer wie stereometrischer Figuren [...] die Bedingungen der Grundlegung einer wissenschaftlichen Astronomie und Musiktheorie“.

„Ein exemplarische[r] Beleg für die beweissichernde Funktion, die die Zahltheorie für die Geometrie hat [sind] die Bemerkungen des Proklos ..., in denen er darlegt, wie der wohl berühmteste geometrische Beweis der Antike, der Satz des

Pythagoras, arithmetisch abgesichert werden kann (s. Proklos, Prop. I, 48)“ (Ms: Die Zahl als Explikation der Ratio).

Die hohe Wertschätzung der Platoniker für die Mathematik, die auf Platon selbst zurückgeht, ist bei dem spätantiken Neuplatoniker Proklos (412–485 n.C.) besonders stark ausgeprägt. In seinem Euklidkommentar vertritt er die Auffassung, dass ausnahmslos alle Zweige des menschlichen Denkens mathematisierbar seien, darunter auch die Theologie (Metaphysik). Ein weiterer Zeuge ist der Neuplatoniker Aurelius Augustinus [354-430, Rhetor in Thagaste, Karthago, Rom und Mailand; von 395 bis zu seinem Tod Bischof von Hippo Regius], der im lateinischen Westen eine ähnliche Bedeutung für die Vermittlung antiken Denkens an Mittelalter und Neuzeit hat wie Proklos im griechischen und arabischen Osten. In der Musiktheorie [*de musica*]im Rahmen der Behandlung der *artes liberales* findet sich das bekannte Diktum: „Betrachte Himmel, Erde, Meer und alles, was da glänzt und kriecht und fliegt und schwimmt: alles hat **Formen**, weil es **Zahlen** hat; nimm sie fort und alles wird zunichte ... und frage, was im Tanz ergötzt, antworten wird die **Zahl**: Siehe, ich bin's. Betrachte die **Schönheit des geformten Körpers**: **Zahlen** sind im Räumlichen festgehalten. Betrachte die **Schönheit der Bewegung** im Körper: **Zahlen** gewinnen Leben im Zeitlichen.“

Im 15. Jahrhundert griff Nikolaus von Kues in seiner Metaphysik und Ontologie auf Gedanken zurück, die Proklos in seinem Kommentar zu Platons Parmenides geäußert hatte; dabei ging es Nikolaus besonders um die Theorie der Einheit und ihres Verhältnisses zur Vielheit. Johannes Kepler schätzte den Euklid-Kommentars des Proklos, den er ausführlich auschrieb und als vorbildlich für die Philosophie der Mathematik bezeichnete.

(15) Weiterführende Hinweise

Man kann auf weitere verblüffende Gesetzmäßigkeiten gerade und besonders der Natürlichen Zahlen verweisen, wie sie eine der bekanntesten Zahlenfolgen, die sog. Fibonaccizahlen, ausdrücken. Sie fangen mit 0 und 1 an, und dann ist jede Fibonacci-Zahl gleich der Summe der beiden vorhergehenden Fibonacci-Zahlen. Sie werden durch $F_0=0$, $F_1=1$ und $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ definiert. Die ersten Fibonacci-Zahlen sind mithin 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. Sie haben eine Fülle von Querbezügen zu anderen Objekten in der Mathematik: Die Formel von Binet setzt sie beispielsweise in Verbindung mit dem Goldenen Schnitt. Sie tauchen im Pascalschen Dreieck als Summen von Diagonalen auf. In der Kombinatorik und Statistik erscheinen sie häufig. In der Natur finden sie sich als Anzahlen von Spiralen von blattähnlichen Organen bei Pflanzen (Blätter, Blüten und Samenstände, z.B. von Sonnenblumen).

Am aufschlussreichsten für die behaupteten Zusammenhänge dürfte aber das Pascal'sche Dreieck [oder auch das stochastische oder fraktale Pascal-Sierpinski-Dreieck] sein. Der Name geht auf Blaise Pascal zurück. Es war jedoch schon früher in anderen Kulturkreisen bekannt: In China spricht man vom Yang-Hui-

Dreieck (nach Yang Hui), in Indien wird es auf Pingala (ca. 3. Jh. v.C.) und Bhattotpala (ca. 1000 n.C.) zurückgeführt, im Iran heißt es das Chayyām-Dreieck (nach Omar Khayyām), in Italien das Tartaglia-Dreieck (nach Niccolò Fontana Tartaglia)

Das Pascal'sche Dreieck ist ein Dreieck von Binomialkoeffizienten und ist grundlegend für die Zahlentheorie wie für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Pascalsche Dreieck gestattet, schnell beliebige Potenzen von Binomen auszumultiplizieren. So befinden sich in der dritten Zeile die Koeffizienten der ersten beiden Binomischen Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

In der nächsten Zeile finden sich die Koeffizienten für $(a \pm b)^3$:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 \pm b^3.$$

Es enthält weiterhin die Reihe der **Natürlichen Zahlen**, sodann die **Fibonaccizahlen**, und auch die **Figurierten Zahlen**. Im Pascalschen Dreieck ist jede Zahl die Summe der beiden Zahlen, die links und rechts oberhalb von ihr stehen. Oben steht die Eins. In Folge ein Schema der ersten 15 Zeilen des Pascalschen Dreiecks. Es kann unbegrenzt weiter geführt werden, so dass es den gesamten Zahlenbereich abdeckt.

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
```

PS: Platons Grundlegung der Mathematik und die Zahlentheorie als Universalmathematik der Wissenschaften wird gegenwärtig in wachsendem Umfang von Mathematikern und Naturwissenschaften erörtert. Ein Anstoß und wichtige Argumente stammen von dem provokativen Grundlagenforscher und Querdenker Peter Plichta. Eine allgemeinverständliche Zusammenfassung – eingebettet in einen biographischen Rahmen – bietet Plichtas Buch mit dem in seiner Dramatik zugegebenermaßen gewöhnungsbedürftigen Titel *Gottes geheime Formel. Die Entschlüsselung des Welträtsels und der Primzahlcode,* 8. Auflage München 2006. Interessierten Mathematikern und Naturwissenschaftlern vermittelt Plichtas Vortrag an der Technischen Universität Illmenau (07.06.2005) einen durch 83 Folien unterstützten Einstieg, abrufbar unter www.plichta.de. Eine ausführliche fachtechnische Ausarbeitung erfolgt seit einigen Jahren seitens eines der führenden Vertreter des Gebietes der Theoretischen Chemie, Jan C. A. Boeyens (University of Pretoria, Südafrika) und seines Kollegen Demetrius C. Levendis. Vgl. Jan C. A. Boeyens / Demitrius C. Levendis: *The Periodicity of Atomic Matter*, Dordrecht: Springer Netherlands 2008, 374 S. Jan C. A. Boeyens hat inzwischen ein zweites Werk zum Thema vorgelegt, betitelt *A Chemistry from First Principles*, Dordrecht: Springer Netherlands 2008, 322 S. Hier ein Überblick der wichtigsten Aussagen dieses Ansatzes:

(1) [Prim-]Zahlen sind das Gerüst der Realität in Biochemie, Kernchemie, physikalischer Astronomie.

(2) Dies entspricht der Einsicht bzw. Vermutung der Pythagoräer und später Platons in dem kosmologischen / naturphilosophischen Dialog *Timaios* sowie überhaupt des Platonismus in Antike (Neuplatonismus), Mittelalter (Augustinusmus), Neuzeit (Newton, Leibniz, Kepler, Euler) und Moderne (Gauß): **Zahlen und ihre Gesetze bestimmen die Dinge oder unsere physikalische Ontologie** (Plichta 2006, 203).

(3) „Gauß hatte schon als 15-jähriger vermutet, daß die Abnahme der Primzahlen nach einem ... einfachen Gesetz erfolgt, nämlich nach dem natürlichen Logarithmus zur Basis e = 2, 718 ..., der Eulerschen Zahl [...] 100 Jahre später, nämlich 1896, verblüffte der französische Mathematiker Jacques Hadamard die Fachwelt mit der Lösung des 'Primzahlsatzes' [...] Alle physikalischen Abläufe, zum Beispiel der radioaktive Zerfall, die barometrische Höhenformel, die Raketengleichung oder die Entropieänderung, gehorchen Gleichungen nach dem natürlichen Logarithmus. Da die Abnahme der Primzahlen ebenfalls mit dem natürlichen Logarithmus verknüpft ist, muß unsere **physikalische Welt eine Folge der Primzahlverteilung** sein“ (Plichta 2006, 13−14)

(4) Nach einem Wort des „Fürsten der Mathematiker“ Carl Friedrich Gauß (1777−1855) ist „die Mathematik ... die Königin der Wissenschaften, und die Arithmetik [Zahlentheorie] ist die Königin der Mathematik.“ Grundlegend die *Disquisitiones Arithmeticae* von 1801. Gauß ist dabei von Pythagoras (570−510 v. C.) inspiriert, den Aristoteles und die Antike überhaupt den „Begründer der Mathematik“ nennen und dem die Aussage „Alles ist Zahl“ zugeschrieben wird (Plichta 2006, 160). Pythagoras hat dabei mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit bei Forschungsaufenthalten in Ägypten und Babylonien das mathematische Wissen dieser ältesten Hochkulturen mit aufgearbeitet.

(5) Die mathematischen **Primzahlen** (*nombres primeurs* = erste Zahlen) sind der **Bauplan des Universums**. Dies ergibt sich schon aus dem **Fundamentalsatz der Arithmetik**: Jede natürliche Zahl größer als 1 ist ein (bis auf die Reihenfolge) eindeutiges Produkt von Primzahlen.

(6) Die Zahl 1 und ihre Struktur ist dabei „als Schnittstelle der ganzen und reziproken Zahlen“ das Fundament der Zahlentheorie. Dies entspricht der antiken **Grundlegung der Zahlentheorie und Mathematik überhaupt in der Zahl 1 (*Monas*)** (Plichta 2006, 152−153, 161−169).

(7) Die ersten drei **Primzahlen 1, 2, 3 sind die Bausteine aller Zahlen** (2006, 216). Mit ihnen können alle Zahlen begrifflich eindeutig abgeleitet bzw. konstruiert werden. Auch dies ist ein zentrales Axiom der antiken Arithmetik, das auf Platon zurückgeht, siehe in Folge (2006, 162).

(8) Aus dieser Primzahlenstruktur können die **Konstanten der Chemie, Physik und**

Biologie wie auch der **Aufbau des Periodensystems der Elemente** (PSE), also letztlich der Atome und ihrer Elektronenschalen hergeleitet oder begründet werden (2006, 191, 213–224, 226): „**Die chemischen Elemente bauen auf der Ordnung der natürlichen Zahlen auf**“ (2006, 235)

(9) Auch für die Einsteinformel $E = m \cdot c^2$, welche Energie/Materie, Raum und Zeit verbindet, lassen sich zahlentheoretische Entsprechungen bzw. Herleitungen zeigen (2006, 183–186).

(10) Dasselbe gilt für die grundlegenden mathematischen Konstanten des **Natürlichen Logarithmus** (Eulersche Zahl) **e** und der **Kreiszahl π**, welche über die von Euler entdeckte Formel $e^{i \cdot \pi} = -1$ miteinander verknüpft sind (2006, 237–247): „**Die Zahl e liefert die Ordnung der fortlaufenden Zahlen, wobei es nur auf die Struktur und Verteilung der Primzahlen ankommt**“ (2006, 247).

(11) Auch für das in unserer Mathematik verwendete **Dezimalsystem** lässt sich zeigen, dass es der Ordnung der Primzahlen folgt, also mit dem Zahlenraum verknüpft ist (2006, 216, 231).

(12) „**Die gesamte Höhere Mathematik in ihrer ungeheuren Vielfalt und Kompliziertheit** [ist] **in Wirklichkeit die Kostümierung der Primzahlen**“ (2006, 248)